Primul test de selecţie pentru juniori

Problema 1. Pentru fiecare număr natural nenul n notăm $a_n = 2\underbrace{33\ldots3}_{n \text{ ori}}$, unde cifra 3 apare de exact n ori. Să se arate că numărul a_{2009} are o infinitate de multipli în mulţimea $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

Soluţie. Numărul a_{2009} nu se divide nici cu 2, nici cu 5, deci are un multiplu scris doar cu cifra 1 (folosită de k ori). "Lipind" numărul $\underbrace{33\ldots3}_{tk \text{ ori}}$ după a_{2009}, $\forall t$, rezultă cerinţa.

Problema 2. Fie $ABCD$ un romb şi fie punctele M şi N pe segmentele AC, respectiv BC astfel încât $DM = MN$. Fie P punctul de intersecţie al dreptelor AC şi DN şi fie R punctul de intersecţie al dreptelor AB şi DM. Să se arate că $RP = PD$.

Soluţie. Dacă N aparţine laturii BC, atunci patrulaterul $DCNM$ este inscriptibil, deoarece $DM = MN$ şi $\angle NCM = \angle MCD$. Atunci $\angle MDP = \frac{1}{2} \cdot \angle C = \angle BAC$, deci $ADPR$ este inscriptibil, de unde concluzia.

Problema 3. Fie A o mulţime finită de numere reale strict pozitive cu proprietatea că:

Pentru orice număr real $a > 0$, mulţimile

$$\{x \in A \mid x > a\} \qquad \text{şi} \qquad \{x \in A \mid x < \frac{1}{a}\}$$

au cardinalele de aceeaşi paritate.

Să se arate că produsul elementelor mulţimii A este egal cu 1.

Soluţie. Fie $A = \{a_1 < a_2 < \ldots < a_n\}$. Vom arăta că $a_1 a_n = 1$. În caz contrar, fie $a_1 a_n < 1$. Fie b real, $\max(a_n, \frac{1}{a_2}) < b < \frac{1}{a_1}$. Mulţimea $\{x \in A \mid x > b\}$ este vidă, însă mulţimea $\{x \in A \mid x < \frac{1}{b}\} = \{a_1\}$ are un element, fals.

Problema 4. Pentru a desena un pătrat $\mathcal{P}$ de latură 2 cm împărţit în pătrate de latură 1 cm este suficient să desenăm trei pătrate: $\mathcal{P}$ şi două pătrate de latură 1 cm, aşezate în colţuri opuse ale lui $\mathcal{P}$.

Care este numărul minim de pătrate necesar pentru a desena un pătrat de latură n cm ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$) împărţit în n^2 pătrate de latură 1 cm?

Soluţie. Pentru $n \geq 3$, putem desena folosind $2n - 2$ pătrate:

- dacă n este impar desenăm, pentru fiecare vârf V al lui $\mathcal{P}$, câte $\frac{n-1}{2}$ pătrate de laturi $n-1, n-2, \ldots, \frac{n+1}{2}$, cu un vârf în V;
- dacă n este par desenăm, pentru fiecare vârf V al lui $\mathcal{P}$, câte $\frac{n}{2} - 1$ pătrate de laturi $n-1, n-2, \ldots, \frac{n}{2} + 1$, cu un vârf în V şi 2 pătrate de latură $\frac{n}{2}$, cu vârfuri în două vârfuri opuse ale lui $\mathcal{P}$.

Nu se poate cu mai puţine, deoarece trebuie ca fiecare punct interior care se obţine prin împărţirea câte unei laturi a lui $\mathcal{P}$ în n părţi egale să fie vârful unui pătrat, numărul acestor puncte este $4n - 4$, iar fiecare pătrat are cel mult două astfel de vârfuri.